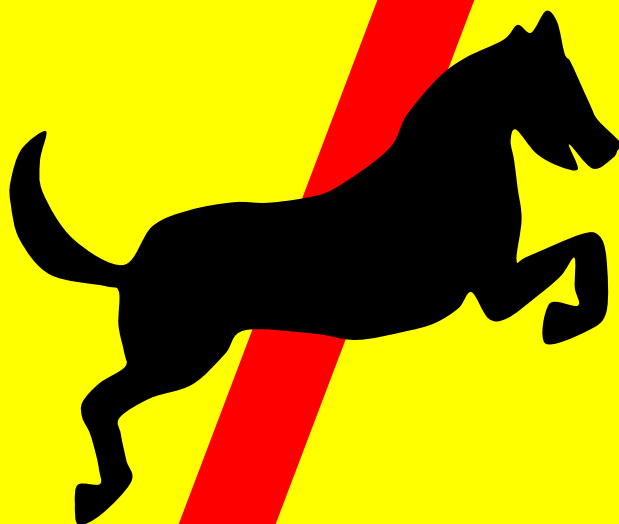


*Usko Lahti*

# *Matikkasavotta*

*Lukion lyhyen  
matematiikan kertaus*



Books on Demand

# *Matikkasavotta*

*Lukion lyhyen  
matematiikan  
kertaus*

Usko Lahti

HARJOITUKSET JA RATKAISUT  
KAIKKIEN VAPAASSA KÄYTÖSSÄ  
<http://tinyurl.com/matikkasavotta>

© 2017 Lahti, Usko

Kustantaja : BoD – Books on Demand, Helsinki, Suomi

Valmistaja: BoD – Books on Demand, Norderstedt, Saksa

ISBN: 978-951-568-155-3

# Alkusanat

Tämä kertauskirja on tarkoitettu Sinulle, joka valmistaudut lyhyen matematiikan ylioppilaskokeeseen.

Kirjassa on huomioitu siirtymäkausi vanhoista opetussuunnitelman perusteista uusiin ja toisaalta teknisten apuvälineiden laajeneva käyttö. Uusien opsiin mukaan opiskelevat kirjoittavat pääosin kevästä 2019 lähtien, nopeimmat jo edellisenä syksynä.

Kirjan teksti, esimerkit ja harjoitukset soveltuvat yleensä sekä vanhojen että uusien opsiin mukaan opiskeleville. Poikkeukset on ilmoitettu kirjaintunnuksella seuraavasti:

**D** = derivaattaan liittyvä. Vanhojen opsiin peruskauraa, uusissa syventävän kurssin aihe.

**L** = lineaarinen optimointi. Vanhoissa opseissa pakollinen. Uusissa jäänee vähemmälle huomiolle, ehkä poistuu kokonaan.

**T** = todennäköisyys ja tilastot. Todennäköisyys- ja tilastolaskut sellaisenaan kuuluvat molempien opsiin pakollisiin kursseihin. Merkityt asiat ovat uusissa opseissa osana syventävää kurssia. Tähti oikeassa ylänurkassa tarkoittaa, että tehtävä on opsiin rajapinnalla.

Abi, käytä kertausaika viisaasti. Aloita alusta ja etene määrätietoisesti. Sivua tutut asiat nopealla lukemisella. Kirjan sisältö on yritetty virittää kokeenlaatijoiden taajuudelle. Jokainen aihepiiri on ”tämä voi tulla” -tyyppinen. Selviydyt ylioppilaskokeessa paljon paremmin, jos ainakin kerran olet nähnyt aiheen ja tutustunut siihen liittyvään esimerkkiin tai laskenut harjoituksen.

Matikkasavotan tavoitteena on Sinun menestyminen ylioppilaskokeessa!

Tampereella, Mirjaminpäivänä 2017

Usko Lahti

PALAUTE TEKIJÄLLE  
palautteeni@gmail.com

ILMOITUKSIA LUKIJALLE  
matikkasavotta@gmail.com

# Sisältö

Alkusanat .....	3
Laskin ja taulukkokirja .....	5
Ylioppilaskokeessa .....	5
1. Aika   Matka   Nopeus .....	7
2. Prosentit   Eksponentiaalinen muutos .....	16
3. Perusalgebraa .....	28
4. Yhtälöitä .....	37
5. Polynomit .....	49
6. Koordinaatiston geometriaa .....	59
7. Lineaarisia työkaluja .....	66
8. Geometriaa tasossa .....	77
9. Geometriaa kolmessa ulottuvuudessa .....	90
10. Todennäköisyys .....	97
11. Tuloperiaate   Jonot   Osajoukot .....	108
12. Tilastot .....	116
13. Lukujonot   Summat .....	130
Vastaukset .....	145
Kuvien lähteet .....	152

Tunnuksella **A** merkityt esimerkit ja harjoitukset soveltuvat erityisesti ylioppilaskokeen A-osaan.

MAOL

Viittaa taulukkokirjan 1.-3. painokseen, Otava, Keuruu 2014.

HARJOITUKSET, RATKAISUT JA HAKEMISTO  
KAIKKIEN VAPAASSA KÄYTÖSSÄ  
<http://tinyurl.com/matikkasavotta>

## Laskin ja taulukkokirja

- Tutustu laskimeen ja taulukkokirjaan hyvissä ajoin ennen ylioppilaskoetta. Voit käyttää useam-  
paakin laskinta. Tyhjennä laskimen muistit ennen koetta. Huomaa, että jos palautat laskimeen ”teh-  
taan säädöt”, jotkut toiminnot voivat muuttua. Esimerkiksi kulman yksikkö voi muuttua radiaaniksi,  
vaikka haluaisit sen olevan asteita. Sinun on siis osattava palauttaa laskin sinulle tuttuun tilaan.  
Muista myös huolehtia, että laskimen virta riittää.
- Jätä laskimet ja taulukkokirja tarkastettavaksi ennen ylioppilaskoetta koulun ilmoittamalla tavalla.

## Ylioppilaskokeessa

- Lue aluksi tehtävävihko kokonaisuudessaan. Aloita ratkaiseminen tehtävästä, joka vaikuttaa tutul-  
ta ja helpolta. Älä juutu pitkäksi aikaa johonkin tehtävään. Palaa siihen myöhemmin, mutta muista  
kuitenkin aikarajoitukset. Luonnostele kuvia ja kaavioita vapaasti, vaikka et liittäisi niitä varsinais-  
seen ratkaisuun. Tehtävän ratkaisussa etene järjestelmällisesti alusta loppuun. Ethän siirrä välitulok-  
sia suorituksen loppupuolelta alkupuolelle.
- Joskus tehtävän a-, b- ja c-kohdat liittyvät toisiinsa, joskus ne ovat kokonaan eri tehtäviä.
- Käy läpi tehtävä ajatuksella. Mitä annetaan? Mitä kysytään? Kopioi tehtävän luvut huolella.  
Huomioi yksiköt. Samassa tehtävässä voi olla vaikkapa kilometrejä ja metrejä, esimerkkinä tämän  
kirjan harjoitus 141. Jos kolmio on tasakylkinen, älä piirrä sitä tasasivuiseksi. Silloin hämää itseäsi  
ja voit erehtyä käyttämään tasasivuiseen kolmioon liittyviä kaavoja.



- Muista kirjoittaa suorituksen eri vaiheille lyhyet perustelut. Kerro laskimen käytöstä, erityisesti jos käytät symbolista laskinta. Kirjoita välitulokset ja kerro miten niihin on tultu. Käytä tavanomaisia matemaattisia merkintöjä. Pelkkä laskimella saatu vastaus ilman perusteluja ei riitä. Älä kuitenkaan perusteluissakaan mene liian pitkälle, vaan pyri napakkuuteen.
- Joskus ratkaisu vaatii paljon tarkkaa työtä, joskus ratkaisu voi olla hyvin lyhyt. Älä mitätöi oikeaa ”ei tää voi olla näin helppo” -ratkaisua. Älä hylkää vaatimatontakaan kuvaa tai yritelmää ellei sallittu ratkaisujen maksimimäärä ylity. Irtopisteet kannattaa kerätä, jos mahdollista.
- Älä säikähdä pitkiä tehtäviä tai vieraita aiheita. Outo sisältö selostetaan tehtävässä. Esimerkiksi harjoituksessa 153 on nuolenpääkirjoitusta, mutta sehän on mukana vain jonkinlaisena somisteena. Oudon tehtävän sisältöä selostetaan tehtävän yhteydessä. Joskus tehtävänanto on melkein pä äidin kielen ymmärtämisen pienoiskoe, esimerkkinä harjoitus 63, entinen ylioppilaskokeen tehtävä.
- Joihinkin tehtäviin voit saada otteen aihepiirin perusteella. Onko kyseessä eksponentiaalinen muutos? Jos annetaan tai kysytään kulmien asteita, kyseessä on usein suorakulmaisen kolmion trigonometriaan liittyvä tehtävä. Olethan huomannut, että filosofi **Pythagoras** vierailee lähes aina ylioppilaskokeen tehtävissä.
- Jos suinkin mahdollista, älä pyöristä välituloksia, sillä pyöristysvirheet voivat kertautua. Numeerinen lopputulos – varsinkin käytäntöön liittyvissä tehtävissä – joudutaan yleensä pyöristämään. Vastauksen on oltava sopusoinnussa tehtävässä annettujen lukujen tarkkuuden kanssa. Jos pyöristysuunta on epätavallinen, kirjoita perustelu. Katso esimerkiksi harjoitus 9.
- Arvioi, jos mahdollista, vastauksen oikeellisuus.
- Jos ratkaisit tehtävän kokeellisesti luettelemalla, on sinun perusteltava huolellisesti ratkaisun oikeellisuus ja yksikäsitteisyys. Kokeiluratkaisu voi käytännössä olla hankala, jos kokeilujen määrä on suuri. Jos määrä on ääretön, ei kokeiluratkaisu ole kelvollinen, ellei määrää pysty rajoittamaan. Joskus kokeiluratkaisu on paras ratkaisu. Käytä luovuuttasi.
- Älä pelkää todistustehtävää. Se voi olla helppo, koska ”vastaus” ilmenee tehtävän muotoilusta. Vertaa poliisin toimintaan. Yleensä on vaikeampaa ”etsiä pankkirosvo” kuin ”todistaa, että joku on pankkirosvo”. Vaatimus todistamisesta ilmoitetaan tavallisesti sanoin

Todista, että ...

Näytä, että ...

Osoita, että ...

Tunnista väite, joka pitää todistaa. Mihin väite liittyy? Jos väite sisältää verrannon, tarvitaan ehkä ristiinkertomista. Jos väitteessä puhutaan käänteislukuista, tarvitaan ehkä käänteislukujen määrittelyä. Älä nojaudu perustelussa itse väitteeseen. Todistustehtävän ratkaisu ei yleensä ole pitkä.

# 1. Aika | Matka | Nopeus

## Aja yksiköitä

MAOL s. 67 - 68

sekunti	s	ajan perusyksikkö
minuutti	min	60 s
tunti	h	60 min = 3600 s
{ vuorokausi päivä	d	24 h
viikko		7 päivää
kuukausi	kk	28 - 31 päivää, laskuissa usein 30 päivää
vuosi	a	365 tai 366 päivää, 12 kk, noin 52 viikkoa

Viikon ensimmäinen päivä on maanantai. Vuoden viikot numeroidaan 1, 2, 3 jne. Vuoden viimeisen viikon numero on 52 tai 53. Numerointia käytetään sovittaessa kokouksien tai tapahtumien ajankohtia. Esimerkiksi koulut ovat perinteisesti päättyneet viikon 22 perjantaina tai lauantaina.

Kuukausissa ”ke-sy-mar-hu” on 30 päivää, helmikuussa 28 tai 29 päivää, muissa 31 päivää.

Tavallisesti vuodessa on 365 päivää. Joka neljäs vuosi on karkausvuosi, ja silloin on 366 päivää. Ylimääräinen päivä lisätään helmikuun loppuun. Karkausvuosiksi on sovittu ne vuodet, joiden vuosiluku on jaollinen neljällä. Tarkkaan ottaen kaikki nämäkään vuodet eivät ole karkausvuosia. Edellinen poikkeusvuosi oli 1900 ja seuraava on 2100, jotka eivät siis ole karkausvuosia.

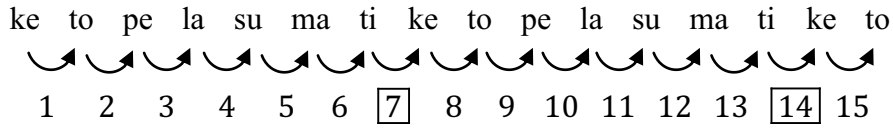


Aurinkokello



**Esimerkki<sup>A</sup>** Herra *Phileas Fogg* kulki maailman ympäri 80 päivässä. Minä viikonpäivänä hän palasi, kun lähtöpäivä oli keskiviikko?

**Pohdintaa**



Kun keskiviikosta mennään eteenpäin 7 päivää, 14 päivää, 21 päivää jne. tullaan keskiviikkoon. Aina kun mennään eteenpäin luvun 7 monikerta päivää, tullaan taas keskiviikkoon. Tämä johtuu siitä, että tietty viikonpäivä toistuu jaksoittain seitsemän päivän välein. Kuukausien tai vuoden päivien lukumäärällä ei asiaan ole vaikutusta.

**Ratkaisu** Kun keskiviikosta mennään eteenpäin luvun 7 monikerta, tullaan keskiviikkoon. Tässä sopiva monikerta on  $11 \cdot 7 = 77$  päivää. Kun siis keskiviikosta edetään 77 päivää, tullaan keskiviikkoon. Päätellään, että 80 päivän kuluttua on lauantai.

**Vastaus** Fogg palasi lauantaina.

**Esimerkki** Lapsi on syntynyt 14. päivänä kesäkuuta. Kuinka vanha lapsi on seuraavan vuoden helmikuun 25. päivänä? Ilmoita vastaus vuosina desimaalilukuna.

**Ratkaisu** Ajattelemme, että lapsi on 15. päivänä kesäkuuta yhden päivän ikäinen, 16. päivänä kesäkuuta 2 päivän ikäinen jne. Laskemme iän päivinä kuukausi kuukaudelta.

Kesäkuu																
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	<b>16</b>

Muut kuukaudet:

heinä	elo	syys	loka	marras	joulu	tammi	helmi	yhteensä
31	31	30	31	30	31	31	25	<b>240</b>

Lapsen ikä päivinä  $16 + 240 = 256$

Lapsen ikä vuosina  $\frac{256}{365} = 0,701 \dots \approx 0,70$

**Vastaus** Lapsen ikä on 0,70 vuotta.

**Esimerkki** Robotti maalaa esineen ajassa 1 min 15 s. Kuinka monta esinettä robotti maalaa tunnissa?

**Ratkaisu** 1 min 15 s = 60 s + 15 s = 75 s

Selvitämme kuinka monta kertaa 75 s sisältyy yhteen tuntiin eli 3600 sekuntiin.

$$\frac{3600}{75} = 48$$

**Vastaus** Robotti maalaa 48 esinettä tunnissa.

**Esimerkki<sup>A</sup>** Toimistossa on kaksi yhtä nopeaa kopiokonetta A ja B. Kone A on heti käyttövalmiina, mutta kone B on suljettuna, ja sen lämpeneminen kestää 4 min. Pekka kopioi molempia koneita käyttäen mahdollisimman nopeasti erään käsikirjoituksen ja selviytyy urakasta 10 minuutissa. Kuinka paljon nopeammin työ olisi joutunut, jos molemmat koneet olisivat heti olleet käyttövalmiina?



**Ratkaisu** Ajatellaan, että kone kopioi  $N$  paperia minuutissa. Päätellään koneiden kopiomäärät.

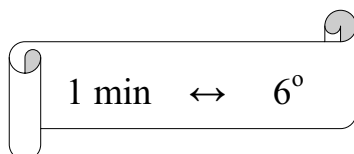
	<u>KONE A</u>	<u>KONE B</u>	
1 min	$N$ paperia	0 paperia	}
2 min	$N$ paperia	0 paperia	
3 min	$N$ paperia	0 paperia	
4 min	$N$ paperia	0 paperia	
5 min	$N$ paperia	$N$ paperia	} ← NÄMÄ KONE B KOPIOISI, JOS SE OLISI HETI KÄYTTÖVALMIS KUTEN A.
6 min	$N$ paperia	$N$ paperia	
7 min	$N$ paperia	$N$ paperia	
8 min	$N$ paperia	$N$ paperia	
9 min	$N$ paperia	$N$ paperia	
10 min	$N$ paperia	$N$ paperia	

Nähdään, että kone B ehtisi kopioida kahden viimeisen minuutin paperit lämpenemisaikana. Työ sujuisi siis 2 min nopeammin, jos molemmat koneet olisivat heti käyttövalmiita.

**Vastaus** Työ sujuisi kaksi minuuttia nopeammin.

**Esimerkki** Määritä kellon viisareiden terävä välinen kulma, kun kello on 8:30?

**Pohdintaa** Kellon isoviisari kiertää 60 minuutin aikana täyden kierroksen eli  $360^\circ$ . Yhden minuutin aikana isoviisari kääntyy  $360^\circ / 60 = 6^\circ$ . Voimme ajatella, että kellotaulun ulkoreunan minuuttijako vastaa jakoa 6 asteen kaariin.



**Ratkaisu** Kello 8:30 jää viisareiden väliin kaksitoista ja puoli "yhden minuutin kaarta". Viisareiden välinen kulma on siten  $12,5 \cdot 6^\circ = 75^\circ$ .



**Vastaus** Viisareiden välinen terävä kulma on  $75^\circ$ .

**Esimerkki** Kuinka moneen eri järjestykseen voi 10 ihmistä asettua riviin? Kuinka kauan eri järjestyksien muodostaminen kestäisi, jos yhden järjestyksen muodostaminen kestäisi sekunnin? Anna vastaus tunteina. MAOL s. 52

**Ratkaisu** Erilaisten järjestysten lukumäärä on  $10! = 3\,628\,800$ . Niiden muodostaminen kestäisi yhtä monta sekuntia. Muunnetaan aika tunneiksi.

$$3628800 \text{ s} = \frac{3628800}{3600} \text{ h} = 42 \text{ h}$$

A diagram consisting of a horizontal rectangle with rounded ends, resembling a scroll. Inside the rectangle, the text "1 h = 3600 s" is written.

**Vastaus** Erilaisia järjestyksiä on 3 628 800 kpl. Niiden muodostaminen kestäisi 42 tuntia.

### Nopeus, matka ja aika tasaisessa liikkeessä

$$\text{nopeus} = \frac{\text{matka}}{\text{aika}}$$

$$\text{aika} = \frac{\text{matka}}{\text{nopeus}}$$

$$\text{matka} = \text{aika} \cdot \text{nopeus}$$

Ensimmäisen kaavan muistamista helpottaa tieto, että nopeuden yksikkö on tyyppiä "matka/aika", esimerkiksi km/h. Muut kaavat voidaan johtaa ensimmäisestä. Käytä toisiaan vastaavia yksiköitä. Jos esimerkiksi matkan yksikkö on **km**, ja nopeuden yksikkö **km/h**, saat keskimmäisestä kaavasta ajan yksikössä **h**.

# Matikkasavotta

Lukion lyhyen matematiikan kertaus **abeille**

Myös kertauskurssin oppikirjaksi

Yksin tai porukassa: kotona, koulussa, kirjastossa tai kuppilassa

Vanhat ja uudet opsit huomioitu selvin merkinnöin

Realistinen sisältö ylioppilaskokeen osien mukaan

Peruskäsitteet, ydinkohdat, viittaukset maol-taulukoihin

Esimerkkejä ja harjoituksia vastauksineen

Kaikki tyyppiä "tämä voi tulla"

tekijä – kokenut matematiikan opettaja ja oppikirjailija – on virittänyt sisällön

**ylioppilaskokeen taajuudelle**

harjoitukset ja ratkaisut **kaikkien** vapaasti saatavilla:

<http://tinyurl.com/matikkasavotta>

ISBN: 978-951-568-155-3

