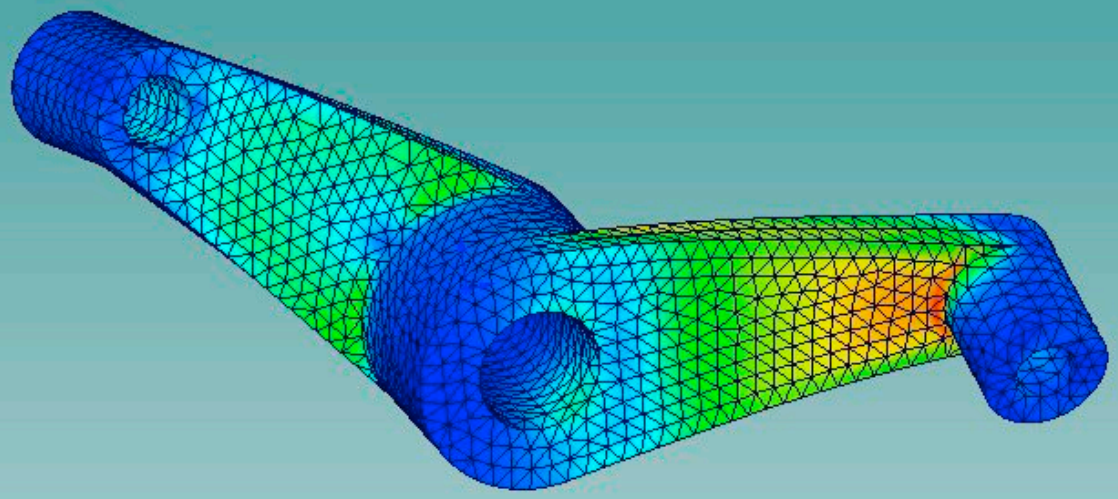
Esa Hietikko

Palkki

Lujuuslaskennan perusteet



Neljäs painos

PALKKI

Lujuuslaskennan perusteet

4. painos

Esa Hietikko

Kuvitus: Esa Hietikko
Taitto: Esa Hietikko

© 2021 Esa Hietikko
Kustantaja: BoD – Books on Demand, Helsinki, Suomi
Valmistaja: BoD - Books on Demand, Norderstedt, Saksa

ISBN: 9789528043591

Sisällys

Lujuuslaskennan merkitys **9**
Tornan sillan sortuminen 10
Lujuuslaskennan historiaa 11
Lujuuslaskenta osana innovaatioprosessia 12
Lujuuslaskennan merkityksestä 13
Lujuuslaskennan muutos viimeisinä vuosina 16
Tehtäviä 17
Rasitustyypit ja kuormitukset **19**
Kuormitus 20
Peruskuormitukset 21
Rasituslajit ja -kuviot 21
Rasitusten selvittäminen käyttäen ATK-menetel-miä 31
Tehtäviä 38
Materiaalit, sallitut jännitykset ja varmuus **41**
Materiaalin valinta 42
Sallitut jännitykset ja varmuus 44
Sallittu muodonmuutos 48
Tehtäviä 49
Veto- ja puristus **51**
Normaalijännitys 52
Venyminen 56
Poissonin luku 64
Lämpöjännitykset 66
Tehtäviä 69
Rakenteiden mitoittaminen **71**
Rakenteen mitoittamisongelma 72
Optimointi 74
Tehtäviä 76
Taivutusjännitykset **77**
Taivutus 78
Taivutusvastus 79
Tehtäviä 85
Poikkipintasuureet **87**

Poikkipinnan neliömomentit 88
Steinerin sääntö 88
ATK-menetelmät 91
Tehtäviä 97
Taipumaviiva 99
Taipumaviiva 100
Superpositioperiaate 102
Staattisesti epämääräiset tapaukset 104
Tehtäviä 107
Leikkaus 109
Leikkausjännitys 110
Leikkauksen aiheuttama muodonmuutos 112
Leikkaus ja taivutus 112
Tehtäviä 117
Vääntö 119
Ympyräpoikkipinnan vääntö 120
Putken vääntö 120
Suorakaidepoikkileikkaus 121
Vääntökulma 123
Tehonsiirtoakselit 123
Tehtäviä 126
Nurjahdus 127
Nurjahdus ja tyssäys 128
Eulerin teoria 128
Sauvan hoikkuuden vaikutus 131
Sallitun jännityksen menetelmä 133
Tehtäviä 135
Yhdistetyt jännitykset 137
Yhdistetyt jännitykset 138
Paineastian jännitykset 138
Taivutus ja normaalivoima 140
Normaalijännitys ja leikkausjännitys 142
Taivutus ja vääntö 144
Tehtäviä 147
Jännityshuiput 151
Käyräakselinen palkki 152

Loven vaikutus 154
Tehtäviä 158
Väsymislujuus 159
Väsyttävä kuormitus 160
Väsymislujuus 161
Rakenteen mitoittaminen 162
Tehtäviä 167
Elementtimenetelmä FEM 169
FEM-laskenta 170
Analyysin kulku 171
Tehtäviä 175
Palkki- ja ristikkorakenteet 177
ANALYSIS 178
Kaksitukinen palkki 179
Tulosten tarkastelu 185
Ristikko 192
Tehtäviä 199
Yhdistetty CAD- ja FEM 201
Ulokepalkin laskenta 202
Monimutkaisempien rakenteiden laskenta 207
Harjoitustehtävien vastauksia 209
Lähteet 211
Hakemisto 212

1

Lujuuslaskennan merkitys

Lujuuslaskennan historiaa
Lujuuslaskenta osana innovaatioprosessia
Lujuuslaskennan merkityksestä

Lujuuslaskenta on luonteeltaan analyyttistä ja matemaattista osaamista vaativa laji. Sille on muutaman vuosisadan aikaisen historiansa aikana kehittynyt voimakas matemaattinen painotus, jossa differentiaali ja integraalilaskennalla on suuri merkitys. Nykyiset ATK menetelmät ovat kuitenkin viimeisten parin vuosikymmenen aikana alkaneet siirtää lujuuslaskentaa myös vähemmän matemaattista osaamista omaavien henkilöiden ulottuville. Samalla käyttöalue on laajentunut niin, että lujuuslaskentaa voidaan nykyään pitää oleellisena osana lähes jokaisen konkreettisen tuotteen kehitysprosessia.

Tornan sillan sortuminen

Imatralla, Tainionkosken voimalaitoksen yläpuolella oleva Tornan silta sortui kansirakennetta purettaessa 6.8.1998 noin kello 07.40. Siltakansi tuettiin ensin kahdella tukitornilla jännevälin kolmannespisteissä. Sitten kantavat betonikaaret katkaistiin tyvestä ja aloitettiin betonikaarten poisto. Kun ylävirran puoleisen kaaren poisto oli edennyt keskiosaan asti, silta romahti. Siltakannen pääpalkit jäivät päistään virtapilarien päälle roikkumaan keskikohdan pudotessa uoman pohjaan asti. Siltakannella oli sortumishetkellä kolme henkilöä työssä. Kaksi heistä onnistuttiin pelastamaan. Yksi henkilö hukkui voimakkaassa virtauksessa.

Sillasta laaditun tietokonemallin perusteella kyettiin päättelemään, että onnettomuus johtui idänpuoleisen tukitornin pettämisestä. Sortuminen lähti liikkeelle tukitornin yläpään siirtyessä virran suuntaan. Tätä edesauttoivat tukitornien esikuormitustunkkauksen aiheuttamat alkusiirtymät ja virran paine.

Onnettomuuden syyksi todettiin tutkintaselostuksessa mm. seuraavia seikkoja:

- Purkusuunnitelmasta puuttuivat koko tukitornin kantavuustarkastelut sekä tukitornin ja sillan yhteistoiminnasta johtuvat kuormien jakautumisen selvitykset purkamisen eri vaiheissa.
- Tuennan kantavuus oli laskettu virheellisesti kytkemättä osakomponentteja eli kierretankoja, varsinaista tukitornia ja yläpään palkkeja sekä kiilapaloja yhtenäiseksi rakennekokonaisuudeksi.
- Neljän pisteen tuenta tukitornissa ilman kuorman keskittämistä (tasausta) oli virheellinen.
- Tuentasuunnitelmasta puuttuivat yksityiskohtaiset ohjeet tunkkaus- ja kiinnitysjärjestelmästä, jolla voitaisiin taata tukitornien tasainen kuormittuminen.

Tämä esimerkki osoittaa karmealla tavalla millaisia seuraamuksia puutteellisesti tai piittaamattomasti suoritetuista suunnitelmista ja lujuuslaskelmista voi olla.

Vastaavanlaisia esimerkkejä puutteellisista suunnitelmista ja laskelmista löytyy vaikka kuinka paljon. Nämä osoittavat sen, kuinka vakavasti otettavasta asiasta

lujuuslaskennassa on kyse ja kuinka tärkeä asia lujuuslaskenta on yhteiskunnan toimivuuden kannalta.

Lujuuslaskennan historiaa

Jo vanhalla ajalla ihmiset ovat rakentaneet monenlaisia rakennelmia kuten pyramideja ja temppeleitä ilman että heillä on ollut käytettävissään teoreettista lujuuslaskennan osaamista. Rakentaminen perustui kokemukselliseen tietoon, joka periytyi sukupolvelta toiselle.

Ensimmäinen tiedossa oleva henkilö, joka on kiinnittänyt huomiota lujuuslaskentaan teoreettisessa mielessä, on italialainen Leonardo da Vinci (1564-1642). Hän kuvaili muistikirjoissaan palkin ja ristikon kantokykyyn vaikuttavia seikkoja. Varsinaisia analyyttisia menetelmiä hänkään ei kuitenkaan esittänyt.

Toinen italialainen, Galileo Galilei (1564-1642) kehitti ensimmäisen systemaattisen lujuuslaskennan teorian ollessaan katolisen kirkon määräämässä kotiarestissa Firenzen lähistöllä. Tuolloin hän kirjoitti aihetta käsittelevän kirjan, jonka käsikirjoitus salakuljetettiin Hollantiin ja julkaistiin Leidenissa 1636. Kirjassaan Galilei tutki mm. sauvan aksiaalista vetoa sekä palkin taivutusta.

Galileo oli hyvin aktiivinen ja erinomainen puhuja. Opiskelijat tulivat kuuntelemaan hänen luentojaan ympäri Eurooppaa. Luennot tapahtuivat yleensä valtavassa salissa, johon mahtui jopa parisentuhatta opiskelijaa. Galileo oli esiintymiskyvystään huolimatta varsin hankala ihminen ja erittäin ivallinen kaikille toista mieltä oleville olivatpa nämä missä yhteiskuntaluokassa tahansa.

Galilei suoritti useita mekaniikan kokeita, joissa hän mm. kumosi useita Aristoteleen väitteitä. Hän myös osoitti, että putoava kappale liikkuu kiihtyvällä nopeudella, jos ilmanvastusta ei oteta huomioon.

Yksi lujuusopin historian merkkihenkilö oli Robert Hooke (1635-1703). Hänen tärkeimpiä havaintojaan lienee kappaleeseen vaikuttavan voiman ja siihen syntyvän muodonmuutoksen suhde. Tätä nimitetäänkin hänen mukaansa Hooken laiksi.

1700-luvulla lujuusoppia vei eteenpäin mm. Leonard Euler (1707-1783), joka kehitti erityisesti lujuusopin analyyttisiä menetelmiä ja tutki kappaleiden muo-

donmuutoksia. Kuuluisin hän kuitenkin lienee palkkien nurjahdukseen liittyvistä teorioistaan.

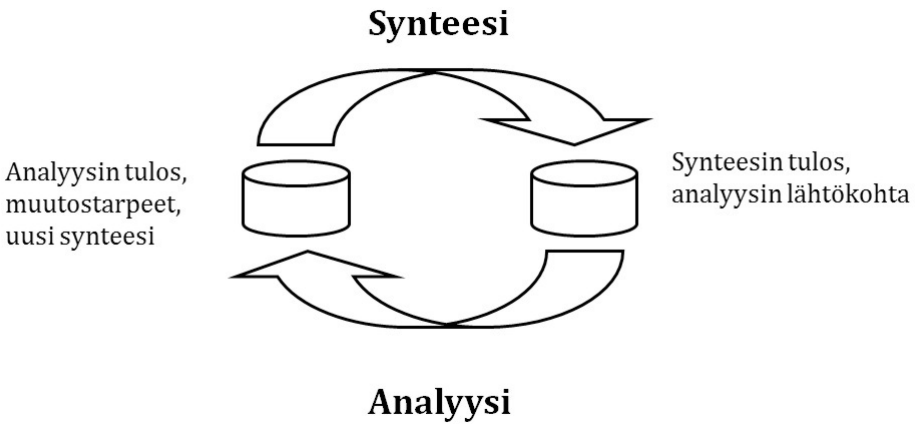
Muita lujuusopin historian merkkihenkilöitä ovat olleet esimerkiksi Thomas Young (1773-1829), joka laajensi Hooken tutkimuksia ja joka on saanut nimensä kimmomoduulin englanninkieliseen termiin (Young's modulus) sekä Simeon Poisson (1781-1840), joka yleisti Hooken lain kolmiulotteiseksi.

Lujuuslaskenta osana innovaatioprosessia

Lujuuslaskennassa tarkastelu kohdistuu aina konkreettiseen tuotteeseen. Hyvin usein kyseessä on loppukäyttäjälle tarkoitettu tuote, jota valmistetaan liiketoiminnallisessa tarkoituksessa. Tällaisen tuotteen elinkaareen kuuluvat kaikki vaiheet ideasta valmistukseen, jakeluun, kulutukseen ja käytöstä poistoon. Elinkaaren alkupäätä, jossa ideasta jalostetaan liiketoimintaa, kutsutaan innovaatioprosessiksi. Innovaatiohan tarkoittaa keksintöä, joka on kehitetty edelleen liiketoiminnaksi. Innovaatioprosessi jakaantuu edelleen kahteen osaan: tuotekehitys- ja toteutusvaiheeseen. Toteutusvaiheessa tuotekehityksen tuloksena aikaansaadut tekniset dokumentit konkretisoidaan tuotanto- ja logistiikkaprosesseiksi, joissa materiaaleista ja osista rakennetaan lopullinen tuote ja toimitetaan se asiakkaalle. Tuotekehitys sisältää vuorostaan tuoteohjelman suunnittelun ja itse tuotesuunnittelun prosessit.

Tuoteohjelman suunnitteluvaiheessa generoidaan asiakkaiden tarpeiden perusteella ideoita, joista valitaan parhaat jatkokehitykseen. Tuotesuunnitteluvaiheessa ideoiden ja vaatimuslistojen avulla valmistetaan tuotteeseen ja tuotantoon liittyvät tekniset dokumentit. Lujuuslaskenta on voimakkaimmin mukana kuvassa tuotesuunnitteluvaiheen aikana.

Tuotesuunnitteluprosessi etenee toisiaan seuraavina synteesi- ja analyysivaiheina. Synteesissä kiinnitetään tuotteeseen liittyviä vapausasteita ts. valitaan arvoja tuotteeseen liittyville ominaisuuksille. Analysointivaiheessa selvitetään täyttävätkö valitut arvot tuotteelle asetetut vaatimukset. Lujuuslaskenta on yksi tyypillisimmistä analyysivaiheen tehtävistä.



Kuva 1.1. Tuotesuunnitteluprosessi etenee toisiaan seuraavina synteesi- ja analyysivaiheina.

Lujuuslaskennan merkityksestä

Lujuuslaskennan perusongelmana on tasapainoilu kahden vastakkaisen tekijän välissä. Rakenteen on oltava riittävän luja ollakseen varmakäyttöinen, muttei liian luja, jotta siitä ei tule liian suurikokoinen, jolloin se on myös painava ja kallis. Tietyissä kohteissa rakenteen massalla on erityismerkitys. Tällainen on esimerkiksi lentokone, jolle keveys on hyvin arvokas ominaisuus. Painavat osat eivät myöskään liikkuvissa laitteissa aina edes takaa suurempaa varmuutta, koska dynaamiset hitausvoimat voivat tällöin kasvaa hyvin suuriksi.

Lisäksi on hyvä huomata ns. massan kertautumis- eli lumivyöryefekti, joka tarkoittaa sitä, että yksittäisen osan massan muutoksilla saattaa olla voimakkaita heijastusvaikutuksia laitteen muiden osien massaan. Jos esim. lentokoneen jonkin osan massa kasvaa määrällä *m*, kasvaa koneen kokonaismassa huomattavasti enemmän, sillä tällöin

- tarvitaan isompi voimalaite
- isompi voimalaite tarvitsee enemmän polttoainetta
- suurempi massa vaatii suuremmat siivet, laskutelineet jne.

Lujuuslaskenta on luonteeltaan analyyttinen tieteenala. Käytännössä se merkitsee sitä, että ennen laskentaa on määritetty tiettyjä reunaehtoja, jotka suunni-

teltavan rakenteen on täytettävä. Laskennassa analysoidaan mainittuja reunaehtoja vastaavien muuttujien arvot ja verrataan niitä reunaehtoihin. Reunaehtoja voidaan hyödyntää myös määritettäessä joitakin suunniteltavan kohteen dimensioita tai materiaaliarvoja. Analysoitavat ominaisuudet voivat liittyä esimerkiksi jännitykseen, muodonmuutokseen, stabiliteettiin tai kulumiseen. Tällöin voidaan analysoida rakenteen kuluminen tiettynä aikana ja tarkistaa, että se jää sallittujen rajojen sisäpuolelle, tai määrätä rakenteen paksuus siten, että kuluminen maksimissaan saavuttaa sallitun arvon.

Hyvän tuotteen tunnusmerkistöön kuuluu turvallinen ja luotettava toiminta kohtuullisen käyttöiän aikana. Jotta tuotteeseen käyttöiän aikana kohdistuvat rasitukset voidaan ennustaa, on tiedettävä ainakin seuraavat asiat:

- Kuormitusten suuruus, suunta, taajuus ja muuttuminen ajan mittaan.
- Käytettyjen materiaalien mekaaniset ominaisuudet.
- Käytettävät laskenta- ja mittausmenetelmät.

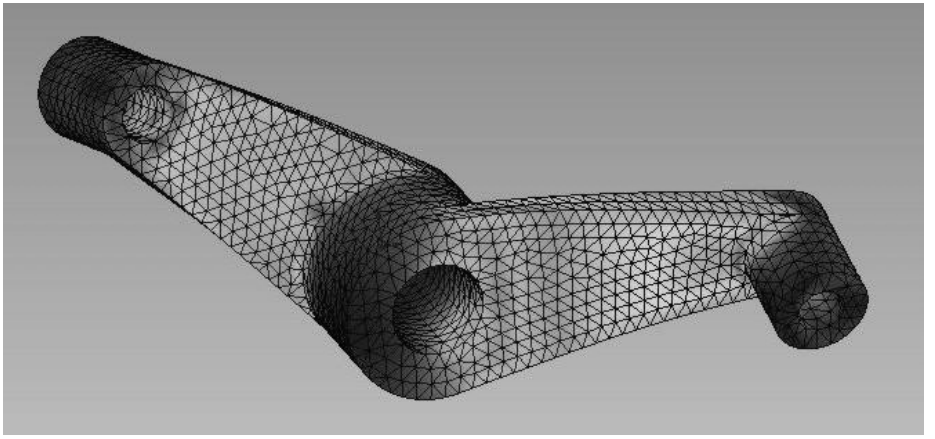
Suunnittelijan on kyettävä kuvittelemaan kaikki tilat, joissa tuote voi menettää toimintakykynsä ja sen jälkeen valita tuotteelle sellaiset dimensiot ja materiaalit, että toimintakyvyn menetys voidaan estää. Tässä kirjassa keskitytään lähinnä kolmeen yleisimpään mekanismiin, joilla tuote voi menettää toimintakykynsä:

- Tuotteen kimmoiset (palautuvat) muodonmuutokset kasvavat liian suureksi.
- Tuotteeseen syntyy pysyvä muodonmuutos eli se myötää.
- Tuotteeseen syntyy väsymismurtuma.

Tuotteeseen syntyvä kimmoinen muodonmuutos on useimmissa tapauksissa varsin hankalasti määrättävissä käsinlaskennalla ja siksi tässä esityksessä keskitytäänkin vain aivan yksinkertaisimpiin perustapauksiin, joiden avulla muodonmuutosten arviointi myös monimutkaisemmissa tapauksissa on helpompaa. Luettelon kaksi viimeistä vauriotyyppiä määräytyvät kappaleessa vaikuttavan jännityksen perusteella. Jännitysten käsinlaskenta on muodonmuutosten tapaan hankalaa monimutkaisemmilla rakenteilla ja siksi tässä kirjassa onkin käsitelty vain yksinkertaisia perustapauksia.

Jännitys lasketaan erilaisilla kaavoilla ja sen jälkeen sitä verrataan käytettävän materiaalin sietokykyyn. Yleensä väliin jätetään myös riittävä varmuusmarginaali, jolla otetaan huomioon laskelmien epävarmuustekijät.

Tässä esityksessä keskitytään lujuuslaskennan perusasioihin ja siksi käytännön laskenta hoidetaan pitkälle käsin (eli työkaluina ovat kynä, kumi, lehtiö ja laskin). Nykyaikaiseen lujuuslaskentaan liittyy kuitenkin paljon ATK-menetelmiä, joista ns. FEM (Finite Element Method tai Finite Element Modeling eli Elementtimenetelmä) on ehkä yleisin. Sen avulla voidaan laskea monimutkaistenkin rakenteiden jännityksiä ja muodonmuutoksia suhteellisen tarkasti ja helposti. Tulokset voidaan esittää havainnollisina kuvina, kuten kuvassa 1.2.



Kuva 1.2. Jännitysten havainnollinen esitys.

Vaikka laskennassa käytettävät matemaattiset menetelmät ovat aina tarkkoja, lähtöarvojen epätarkkuudesta johtuen laskennan tulokset eivät ole koskaan tarkkoja. Siitä huolimatta parhaaseen lopputulokseen päästään, jos laskenta suoritetaan aina ikään kuin kaikki luku-arvot olisivat tarkkoja. Lopuksi tulos voidaan pyöristää valmistuksen tai raaka-aineen edellyttämälle tarkkuudelle. Esimerkiksi tavallisten ruuvien nimellishalkaisijat on mitoitettu millimetrin välein.

Lujuuslaskennan muutos viimeisinä vuosina

Lujuuslaskenta on muuttunut voimakkaasti tietokoneiden kehittyessä viimeisten vuosikymmenten aikana. Nykyisin kyetään tietokoneen avulla laskemaan huomattavasti monimutkaisempia rakenteita kuin käsin on koskaan pystytty laskemaan. Myös laskennan nopeus on kasvanut tietokoneiden laskentatehon kasvaessa. Tänään voidaan laskea sekunneissa tehtäviä, joiden laskentaan parikymmentä vuotta sitten kului tietokoneelta minuutteja tai jopa tunteja.

Tämä ei kuitenkaan merkitse sitä, että käsinlaskennan merkitys tulisi vähenemään jatkossa. Vaikka rakenteet analysoidaan tietokoneilla, on aina viisainta pyrkiä saamaan tulos myös jollain muulla menetelmällä. Jos kaksi erilaista menetelmää antaa saman tuloksen, jota vielä tukee suunnittelijan kokemusperäinen tieto, voidaan olla kohtuullisen varmoja siitä, että laskenta on luotettava.

Periaatteessa kakkoslaskentamenetelmänä voidaan käyttää myös toista tietokoneohjelmaa, mutta useissa tapauksissa se ei ole mahdollista. Silloin ainoaksi vaihtoehdoksi tietokoneanalyysin varmistamiseen jää käsinlaskenta.

CAD-ohjelmien yhteyteen ilmaantuneet lujuuslaskennan lisämoduulit tekevät analyysin suorittamisesta varsin näppärän toimenpiteen. Varsinkin ensikertalaisia ilahduttaa usein kaunis grafiikka, jota ohjelmamoduulin avulla saadaan aikaan. Siitä huolimatta on aina pidettävä kirkkaana mielessä, että vaikka laskennan suorittaminen on helppoa, on myös virheiden tekeminen helppoa. Koskaan ei voi myöskään vähätellä lähtötietojen oikeellisuuden merkitystä. Mitä tarkemmin materiaalien ominaisuudet ja vallitsevat olosuhteet tunnetaan, sitä parempi mahdollisuus analyysillä on onnistua.

Oppikirjassa esitellään lujuuslaskennan perusteet käytännönläheisesti ja turhia teorioita välttäen. Nykyaikaisilla ATK-menetelmillä on keskeinen osuus kirjan sisällössä.

Lähestymistapa sopii ammattikorkeakoulutasoiseen lujuuslaskennan perusteiden opetukseen, jossa tavoitteena on osaamisen käytännönläheinen puoli. Lujuuslaskenta kytkeytyy lähes jokaisen tuotteen kehitysprosessiin.

9 789528 043591

BoD™ BOOKS on DEMAND

www.bod.fi